

---

## Lista zadań Nr 1

# Ciąg liczbowy nieskończony. Granica ciągu

### 1.1 Napisać pierwsze pięć wyrazów ciągu:

$$1.1.1) u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad 1.1.2) u_n = n(1 - (-1)^n); \quad 1.1.3) u_n = \frac{3n+5}{2n-3}; \quad 1.1.4) u_n = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### 1.2 Napisać wzór na wyraz ogólny ciągu:

$$1.2.1) -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots; \quad 1.2.2) 0, 2, 0, 2, \dots;$$

$$1.2.3) 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots; \quad 1.2.4) 1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, \dots;$$

$$1.2.5) -3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \dots; \quad 1.2.6) 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$$

### 1.3 Znaleźć największy (najmniejszy) wyraz ograniczonego z góry (z dołu) ciągu $\{u_n\}$

$$1.3.1) u_n = 6n - n^2 - 5; \quad 1.3.2) u_n = e^{10n - n^2 - 24}; \quad 1.3.3) u_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n};$$

$$1.3.4) u_n = 2n + \frac{512}{n^2}; \quad 1.3.5) u_n = 3n^2 - 10n - 14; \quad 1.3.6) u_n = -\frac{n^2}{2n}.$$

### 1.4 Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$1.4.1) u_n = \frac{n}{n+1};$$

$$1.4.2) u_n = \frac{4n-3}{6-5n};$$

$$1.4.3) u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3};$$

$$1.4.4) u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3};$$

$$1.4.5) u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5};$$

$$1.4.6) u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)};$$

$$1.4.7) u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)};$$

$$1.4.8) u_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2;$$

$$1.4.9) u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1};$$

$$1.4.10) u_n = \frac{(-0.8)^n}{2n-5};$$

$$1.4.11) u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n};$$

$$1.4.12) u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n};$$

$$1.4.13) u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2};$$

$$1.4.14) u_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}};$$

$$1.4.15) u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n-n}};$$

$$1.4.16) u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n};$$

$$1.4.17) u_n = \sqrt{n^2+n} - n;$$

$$1.4.18) u_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3};$$

$$1.4.19) u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7};$$

$$1.4.20) u_n = \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{-1} + 3};$$

$$1.4.21) u_n = \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n-1}}.$$

### 1.5 Opierając się na twierdzeniu o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$1.5.1) u_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}; \quad 1.5.2) u_n = \sqrt[n]{3^n = 5^n + 7^n}; \quad 1.5.3) u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

### 1.6 Opierając się na twierdzeniu o granice ciągu monotonicznego (liczba $e$ ) obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$1.6.1) u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n; \quad 1.6.2) u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}; \quad 1.6.3) u_n = \left(\frac{n+4}{n}\right)^n;$$

$$1.6.4) u_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{-n+2}; \quad 1.6.5) u_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}; \quad 1.6.6) u_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n-4}.$$

### 1.7 Stosując odpowiednie metody obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$1.7.1) u_n = \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}; \quad 1.7.2) u_n = n(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1}); \quad 1.7.3) u_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}};$$

$$1.7.4) u_n = n(\ln(n+1) - \ln n); \quad 1.7.5) u_n = \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}; \quad 1.7.6) u_n = \sqrt{n(n - \sqrt{n^2-1})};$$

$$1.7.7) u_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}; \quad 1.7.8) u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}; \quad 1.7.9) u_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$1.7.10) u_n = \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 + (3+n)^2}; \quad 1.7.11) u_n = \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}; \quad 1.7.12) u_n = \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3};$$

$$1.7.13) u_n = \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}; \quad 1.7.14) u_n = \frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}; \quad 1.7.15) u_n = \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1};$$

$$1.7.16) u_n = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}; \quad 1.7.17) u_n = n(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}); \quad 1.7.18) u_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}};$$

$$1.7.19) u_n = \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}; \quad 1.7.20) u_n = n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}); \quad 1.7.21) u_n = \sqrt{n^2-3n+2} - n;$$

$$1.7.22) u_n = n - \sqrt{n(n-1)}; \quad 1.7.23) u_n = n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}; \quad 1.7.24) u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n};$$

$$1.7.25) u_n = \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}; \quad 1.7.26) u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n; \quad 1.7.27) u_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1};$$

$$1.7.28) u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}};$$

$$1.7.29) u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2};$$

$$1.7.30) u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n};$$

$$1.7.31) u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$