
Lista Nr 6

Zastosowanie pochodnej funkcji

6.1 Ekstremum. Monotoniczność

6.1.1 Ekstremum

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

1. $f(x) = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$;
2. $f(x) = \frac{1}{4}x^3(x^2 - 5)$;
3. $f(x) = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}$;
4. $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$;
6. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$;
7. $f(x) = e^{2x - x^2}$;
8. $f(x) = \frac{1}{x}e^{-1/x}$;
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
10. $f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$;
11. $f(x) = x^2 \ln x$;
12. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

6.1.2 Monotoniczność

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$;
2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$;
3. $f(x) = x^3 + x$;
4. $f(x) = x - e^x$;
5. $f(x) = x^2 e^{-x}$;
6. $f(x) = 2x^2 - \ln x$;
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$;
8. $f(x) = -x^2 \sqrt{x^2 + 2}$;
9. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;
10. $f(x) = x - \ln 1 + x^2$;
11. $f(x) = (x - 2)^5(2x + 1)^4$;
12. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

6.1.3 Maksimum-minimum funkcji w przedziale domkniętym

Wyznaczyć najmniejszą największą wartość funkcji $f(x)$ w danym przedziale $\langle a, b \rangle$:

1. $f(x) = -3x^4 + 6x^2$, $\langle -2, 2 \rangle$;
2. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$, $\langle 0, 4 \rangle$;
3. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, $\langle 0, 4 \rangle$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$, $\langle 0, 1 \rangle$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$, $\langle 0, 1 \rangle$;
6. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $\langle -6, 8 \rangle$;
7. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1 - x}$, $\langle 0, 1 \rangle$;
8. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $\langle 0, 3 \rangle$.

1. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.5 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 zł , a ścian bocznych – 30 zł . Jakie powinny być wymiary kontenera,

aby koszt jego budowy był najmniejszy.

2. Jaka powinna być miara kąta α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień pola r wpisanego w ten trójkąt był największy?

3. Odcinek o długości l podzielić na dwie części tak, aby suma pól kwadratów zbudowanego na tych częściach była najmniejsza?

4. W parabolę o równaniu $y = 16 - x^2$ wpisano prostokąt, którego dwa wierzchołki umieszczone są na parabole, a przeciwny bok leży na osi OX . Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.

5. Drogi łączące miasta A i B oraz B i C tworzą kąt $\frac{\pi}{3}$. Samochód osobowy wyruszył z miasta A do B i poruszał się z prędkością $v_1 = 80$ km/h. Jednocześnie z miasta B do C wyruszył samochód ciężarowy i jechał z prędkością $v_2 = 50$ km/h. Po jakim czasie samochody te będą najbliżej siebie, jeżeli odległość między miastami A i B wynosi 200 km.

6.2 Wypukłość-wkłęśłość wykresu funkcji. Punkty przegięcia

6.2.1 Przedziały wypukłości, punkty przegięcia

Wyznaczyć przedziały wypukłości, wkłęśłości wykresu funkcji oraz punkty przegięcia:

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;
2. $f(x) = (x + 1)^4 + e^x$;
3. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$;
4. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$;
5. $f(x) = (x + 2)^6 + 2x + 2$;
6. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 12}$;
7. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x - 3}$;
8. $f(x) = \ln(1 + x)$;
9. $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$;
10. $f(x) = e^{\arctg x}$.

6.3 Badanie przebiegu zmienności funkcji i sporządzanie jej wykresu

6.3.1 Asymptoty wykresu funkcji

Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

1. $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$;
2. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$;
3. $y = \frac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}$;
4. $y = 3x + \arctg 5x$;
5. $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$;
6. $y = \frac{\sin x}{x}$.

6.3.2 Badanie przebiegu zmienności funkcji

Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić jej wykres

1. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$;
2. $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$;
3. $y = \frac{\ln x}{x}$;
4. $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$;
5. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$;
6. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$;
7. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;
8. $y = x \arctg x$;
9. $y = x^3 e^{-x^2/2}$;
10. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;
11. $y = \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2}$;
12. $y = \frac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}$;
13. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
14. $y = (x^2 + 1)e^{-x^2/2}$;
15. $y = \sin x + \cos x$.

6.4 Wzór Taylora

1. Rozwinąć wielomian $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ względem potęg dwumianu $x - 4$.
2. Rozwinąć wielomian $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ względem potęg dwumianu $x + 1$.
3. Rozwinąć wielomian $x^{10} - 3x^5 + 1$ względem potęg dwumianu $x - 1$.
4. Napisać wzór Taylora rzędu 3 funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , jeśli:
 1. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$;
 2. $f(x) = \ln(4 + x^2)$, $x_0 = 0$;
 3. $f(x) = \sqrt[3]{8 + x^2}$, $x_0 = 0$;
 4. $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$;
 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$;
 6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.
5. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby x spełniona jest nierówność:
 - (a) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$;
 - (b) $\ln x \leq x - 1$, przy czym równość zachodzi tylko dla $x = 1$.
6. Napisać wzór Taylora n -go rzędu dla funkcji $f(x) = x^3 \ln x$ przy $x_0 = 1$.
7. Napisać wzór Taylora $2n$ -go rzędu dla funkcji $f(x) = \sin^2 x$ przy $x_0 = 0$.
8. Napisać wzór Maclaurina funkcji:
 - 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$;
 - 2) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$;
 - 3) $f(x) = \ln \frac{x-5}{x-4}$;
 - 4) $f(x) = (x+3)e^{-2x}$;
 - 5) $f(x) = \operatorname{sh} x$;
 - 6) $f(x) = \operatorname{ch} x$;
 - 7) $f(x) = \arcsin x$;
 - 8) $f(x) = \arctan x$;
 - 9) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

6.5 Reguła de L'Hospitala

Za pomocą twierdzenia de-L'Hospitala obliczyć granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin x}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{Ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$;
8. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$;
9. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$;
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{5^x - 4^x}$;
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^7 - 2^7}$;
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{1/x} - 1)$;
14. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
15. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(x-1)$;
16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$;
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}$;
18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{Ctg} x)^{1/\ln x}$;
19. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$;
20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3 x$;
21. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$.