
Lista Nr 7

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. Całka nieoznaczona

Całki podstawowe

1.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	3'.	$\int e^x dx = e^x + C$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	5.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
6.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	7.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{Ctg} x + C$
8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	9.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcCtg} x + C \end{cases}$

Metody całkowania

bezpośrednie całkowanie

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

całkowanie przez części

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = U(t) + C = U(\varphi^{-1}(x)) + C$$

7.1 Stosując tablice całek podstawowych obliczyć całki

1. $\int (x+3)^{15} dx;$
2. $\int \frac{dx}{(4-x)^{15}};$
3. $\int \cos(2x+5) dx;$
4. $\int e^{\frac{x+3}{5}} dx;$
5. $\int \sqrt[3]{(4x-5)^4} dx;$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}};$
7. $\int (3-x^2)^2 dx;$
8. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx;$
9. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$
10. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx;$
11. $\int e^{-2x} dx;$
12. $\int \sqrt{1-3x} dx;$
13. $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
14. $\int \frac{dx}{2+3x^2};$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$
16. $\int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}};$
17. $\int (e^{-x}+e^{-2x}) dx;$
18. $\int \frac{dx}{2\sin^2 \left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)};$
19. $\int \sqrt[3]{(9-7x)^4} dx;$
20. $\int \frac{3dx}{\sqrt[5]{(1-8x)^3}};$
21. $\int \frac{2dx}{7-3x};$
22. $\int (x^3-x^2+1)(x^2+x+1) dx;$
23. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx;$
24. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4x+5}}.$
25. $\int \left(6x^3-8x^2+3-\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right) dx;$
26. $\int \frac{(x^3-2x)^2}{x^4} dx;$
27. $\int \frac{(6x^2-4x+5)dx}{x^3};$
28. $\int \frac{x^3\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx;$
29. $\int \frac{3x\sqrt{x}+5x\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx;$
30. $\int \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^3}-2\sqrt[3]{5x^4}}{5\sqrt[3]{x}} dx;$
31. $\int (4-3\sqrt[3]{x})^2 dx;$
32. $\int x^3(1-x)^3 dx;$
33. $\int \frac{dx}{5\sin^2 3x}.$
34. $\int e^{1-x} dx;$
35. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin x};$
36. $\int e^{-x}(e^{2x}-e^x \sin 2x) dx;$

7.2 Całkując przez części, obliczyć całki

1. $\int \ln x dx;$
2. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx;$
3. $\int \operatorname{arctg} x dx;$
4. $\int x^4 \ln x dx;$
5. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$
6. $\int \arcsin x dx;$
7. $\int \sqrt{x} \ln x dx;$
8. $\int x \operatorname{arctg} x dx;$
9. $\int x e^{-x} dx;$
10. $\int x^2 \arccos x dx;$
11. $\int x^2 e^{-2x} dx;$
12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$
13. $\int x^3 e^{-x^2} dx;$
14. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx;$
15. $\int \sin(\ln x) dx;$
16. $\int e^x \cos x dx;$
17. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$
18. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx;$
19. $\int x \sin 2x dx;$
20. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$
21. $\int x^2 e^{-x} dx;$
22. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$
23. $\int \ln(x+1) dx;$
24. $\int x \cos x dx;$

7.3 Obliczyć całki od funkcji wymiernych.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \frac{5x-13}{x^2-4x-5} dx; & 2. \int \frac{5x-11}{x^2-5x+6} dx; & 3. \int \frac{16-3x}{14-9x+x^2} dx; \\
 4. \int \frac{3x+41}{x^2-x-6} dx; & 5. \int \frac{5+3x}{15-8x+x^2} dx; & 6. \int \frac{22+13x}{x^2+2x-8} dx; \\
 7. \int \frac{3x}{x^2-6x+8} dx; & 8. \int \frac{4x}{x^2+2x-3} dx; & 9. \int \frac{3-14x}{x^2+x-6} dx; \\
 10. \int \frac{69-31x+2x^2}{(x-5)(x-2)^2} dx; & 11. \int \frac{13+5x}{(x-3)(x+4)^2} dx; & 12. \int \frac{7x^2-4x-2}{(x-2)^2(x+1)} dx;
 \end{array}$$

7.4 Obliczyć całki, wykonując podane podstawienie

$$\begin{array}{lll}
 1. \int x \sin(2x^2-1) dx, & 2x^2-1=t; & 2. \int \frac{\sqrt{3-\ln x}}{x} dx, & 3-\ln x=t; & 3. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx, & \operatorname{tg} x=t; \\
 4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{x^3-3}}, & x^3-3=t; & 5. \int x e^{-x^2} dx, & -x^2=t; & 6. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, & \frac{1}{x}=t; \\
 7. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, & \ln x=t; & 8. \int \frac{e^x dx}{4e^x-3}, & 4e^x-3=t; & 9. \int \frac{x^2 dx}{\sin^2 x^3}, & x^3=t; \\
 10. \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}, & \operatorname{arctg} x=t; & 11. \int e^{\sin x} \cos x dx, & \sin x=t; & 12. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}, & x^3=t.
 \end{array}$$