
Lista zadań Nr 8

Całka oznaczona. Zastosowanie całek oznaczonych

8.1 Całka oznaczona

Obliczyć całkę oznaczoną:

1. $\int_3^5 \frac{x dx}{x^2 - 4}$;
2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^2}$;
3. $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$;
4. $\int_0^1 \sqrt{1 + x} dx$;
5. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;
6. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$;
7. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$;
8. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$;
9. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$;
10. $\int_1^2 \frac{dx}{x + x^3}$;
11. $\int_0^{e-1} \ln(x + 1) dx$;
12. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}$;
13. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$;
14. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$;
15. $\int_1^3 \frac{dx}{x + 2x^2}$;
16. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;
17. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;
18. $\int_0^3 \frac{dx}{e^{x/3}}$;
19. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$.

8.2 Pole obszaru

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego liniami:

1. $y = (x - 2)^3$, $y = 4x - 8$.
2. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
3. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
4. $y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi/2$).
5. $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.
6. $y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$.

7. $y = x\sqrt{36 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \leq x \leq 6)$.
 8. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.
 9. $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.
 10. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.
 11. $3x + 2y - 12 = 0$,
 $y = x + 1$, $y = 0$;
 12. $x - 4y + 2$,
 $y = -x + 3$, $y = 0$;
 13. $y = 3x - 1$, $y = 0$,
 $x = 2$, $x = 4$;
 14. $y = x^2 - x - 6$,
 $y = -x^2 + 5x + 14$;
 15. $4x^2 - 9y + 18 = 0$,
 $2x^2 - 9x + 36 = 0$;
 16. $y^2 = 8x$,
 $2x - 3y + 8 = 0$;
1. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $y = e^x$, prostą o równaniu $x = 1$ i osią OX .
 2. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $y = \frac{1}{x^3}$, prostą $x = 1$, osią OX i osią OY .
 3. Czy pole obszaru, zawartego między wykresami funkcji $y = 2^x$, $y = \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$ i osią OX , jest skończone?
 4. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \frac{x}{2}$ i osią OX .
1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami: $y = \arcsin x$, $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.
 2. Obliczyć pole ograniczone pętlą linii $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
 3. Obliczyć długość łuku linii łańcuchowej $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$ w przedziale od $x = 0$ do $x = 3$.
 4. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi Ox obszaru ograniczonego liniami $y^2 = 2px$, $x = h$.

8.3 Długość łuku krzywej

Obliczyć długość łuku krzywej:

1. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.
2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$.
3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq 7/9$.
4. $y = e^x + 26$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.
5. $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leq x \leq 4$;
6. $y = 2 + \cosh x$, $0 \leq x \leq 1$;
7. $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$

$$8. \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/4; \end{cases}$$

$$10. r = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$11. r = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0;$$

$$12. r = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

8.4 Objętość bryły obrotowej

Obliczyć objętość bryły obrotowej utworzonej przez obrót dookoła osi oX obszaru ograniczonej liniami:

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm b.$$

$$2. xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

$$3. y = 3 \sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$4. y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$5. y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2.$$

$$6. y = x^3, \quad y^2 - x = 0.$$

$$7. y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$$

$$8. y = 5 \cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \geq 0.$$

$$9. y = xe^x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0.$$

$$10. y = x^2, \quad y^2 - x = 0.$$

$$11. y = \sin(\pi x/2), \quad y = x^2.$$

$$12. y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$$

8.5 Pole powierzchni bocznej

Obliczyć pole bryły obrotowej powstałej przez obrót dookoła osi oX linii:

$$1. 3y - x^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq a).$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (-a \leq x \leq a, \quad a > 0).$$

$$3. y = \operatorname{tg} x \quad (0 \leq x \leq \pi/4).$$

$$4. \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \quad (0 \leq t \leq \pi/2); \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2); \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{cases}$$

8.6 Całka niewłaściwa

Obliczyć całkę niewłaściwą:

$$\begin{array}{lll} 1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}; & 2. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}; & 3. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \\ 4. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; & 5. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; & 6. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \\ 7. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}; & 8. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; & 9. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; \\ 10. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}; & 11. \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}; & 12. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx. \end{array}$$