

Lista Nr 1

Podstawowe funkcje. Elementarne przekształcenia wykresu funkcji

1.1 Podstawowe własności funkcji

1.1.1 Podać dziedziny funkcji oraz zbiory wartości funkcji:

1. $f(x) = \ln(x + 3)$;
2. $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$;
3. $f(x) = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$;
4. $f(x) = \arccos \frac{1 - 2x}{4}$;
5. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$;
6. $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$;
7. $f(x) = e^{x^2 - 2}$;
8. $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$;
9. $f(x) = 2^{\arccos(1-x)}$;
10. $f(x) = \sqrt{2x - 3}$;
11. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$;
12. $f(x) = \arcsin \frac{2}{x}$;
13. $f(x) = 2^{-1/x}$;
14. $f(x) = \sqrt{3 + \operatorname{arctg} 3x}$;
15. $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1}$;
16. $f(x) = \log_2(4 - \sqrt{x})$;
17. $f(x) = \sqrt{2 + 5 \ln x}$;
18. $f(x) = \frac{4}{e^{2-x} - 1}$.

1.1.2 Wyznaczyć obraz G zbioru F przy odwzorowaniu f :

1. $f(x) = x^2$, $F = \langle -1, 2 \rangle$;
2. $f(x) = |x|$, $F = \{x : 1 \leq |x| \leq 2\}$;
3. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$, $F = (0, 1)$;
4. $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, $F = (0, 1)$;
5. $f(x) = \log_3 x$, $F = (3, 27)$;
6. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$, $F = \langle 0, 1/2 \rangle$.

1.1.3 Czy następujące funkcje są różnowartościowe:

1. $f(x) = 6x - 1$;
2. $f(x) = \frac{5 - 3x}{x + 3}$;
3. $f(x) = \ln^2 x$;
4. $f(x) = \arccos x$;
5. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$;
6. $f(x) = x \arcsin(x/2)$;
7. $f(x) = e^x \operatorname{arctg} x$;
8. $f(x) = \ln^{-2}(\frac{1}{4} \arccos x)$.

1.1.4 Znaleźć funkcję odwrotną i jej dziedzinę, jeśli podstawowa funkcja określona jest na danym przedziale:

1. $y = x^2 - 1$: a) $x \in (-\infty, -1/2)$; b) $x \in \langle 1/2, \infty \rangle$.
2. $y = \sin x$: a) $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$; b) $x \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$.
3. $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0), \\ 2x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$
4. $y = \cos^2 x$: a) $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$; b) $x \in \langle \pi/2, \pi \rangle$; c) $x \in \langle \pi, 3\pi/2 \rangle$.

1.1.5 Czy dane funkcje są tożsamościowe:

- 1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ oraz $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ oraz $\varphi(x) = x$;
- 3) $f(x) = x$ oraz $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ oraz $\varphi(x) = 2 \lg x$.

1.1.6 Wyznaczyć przedziały znakowości oraz miejsca zerowe funkcji:

- 1) $f(x) = 3x - 6$; 2) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; 3) $f(x) = 2^{x-1}$;
- 4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$; 5) $f(x) = |x^3 - 4x|$; 6) $f(x) = -\frac{(5-2x)(x+3)^3(x+1)^5}{(4x+3)^2(x^3+1)}$;
- 7) $f(x) = \frac{2x+4}{\sqrt[3]{x^2-6x-16}}$; 8) $f(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 6}{e^x + 1}$; 9) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$.

1.1.7 Znaleźć funkcje odwrotne $h(x)$ do podanych funkcji $f(x)$:

1. $f(x) = 2x + 3$; 2. $f(x) = x^5$; 3. $f(x) = x^4$;
4. $f(x) = \frac{1}{x}$; 5. $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$; 6. $f(x) = \sin 2x$;
7. $f(x) = \arccos \sqrt[3]{x}$; 8. $f(x) = \sin 3x, x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$; 9. $f(x) = \ln(x/2)$;
10. $f(x) = 3^{\cos x}, x \in [0, \pi]$; 11. $f(x) = 2 + 3 \ln^2 x, x \in (0, 1)$; 12. $f(x) = 1 - \log_4 x$;
13. $f(x) = 2x^{5/3}$; 14. $f(x) = 2 + 3 \ln^2 x, x \in (1, \infty)$; 15. $f(x) = e^{x/3}$.

1.1.8 Zbadaj czy funkcje są parzyste bądź nieparzyste

1. $f(x) = x^2 - |x|$; 2. $f(x) = x + x^2 \sin x$; 3. $f(x) = \ln 2x$; 4. $f(x) = \arccos^2 x$;
5. $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 - 4}$; 6. $f(x) = \operatorname{arctg}(4x) \cdot \arcsin(x)$; 7. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{4\sqrt{x}}$; 8. $f(x) = \ln(x^3 - x)$;
9. $f(x) = \ln(x^4 - x^2)$; 10. $f(x) = (e^{2x} + e^{-2x}) \operatorname{tg} x$.

1.1.9 Określić funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f \circ g$, $g \circ f \circ f$ oraz ich dziedziny, jeśli:

1. $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$;
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$;
3. $f(x) = \sin x$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $g(x) = \arcsin x$;
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$;
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, +\infty); \end{cases}$
6. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \log_2 x$;
7. $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \operatorname{tg} x$.

1.1.10 Rozłożyć dane funkcje złożone na podstawowe:

1. $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$;
2. $f(x) = 2^{\cos x}$;
3. $f(x) = \sqrt[4]{\cos x}$;
4. $f(x) = \cos \sqrt[4]{x}$;
5. $f(x) = \sqrt[5]{\sin(4^{\sin x^3})}$;
6. $f(x) = 3^{x^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}}$.

1.1.11 Naszkicować wykresy funkcji:

1. $y = kx + b$, jeśli : a) $k = 2$, $b = 0$; b) $k = 0$, $b = -2$; c) $k = -1$, $b = -1/3$.
2. $y = y_0 + a(x - x_0)$, jeśli : a) $a = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$; b) $a = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
c) $a = -1/2$, $x_0 = -2$, $y_0 = 3/2$.
3. $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$, jeśli : a) $k = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$; b) $k = -2$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1/2$.
4. $y = a \sin(kx + \alpha)$, jeśli : a) $a = 1$, $k = 2$, $\alpha = \pi/3$; b) $a = -2$, $k = 1/2$, $\alpha = -\pi/3$.
5. $y = a \operatorname{tg}(kx + \alpha)$, jeśli : a) $a = 3$, $k = 1/2$, $\alpha = \pi/4$; b) $a = -1/2$, $k = 2$, $\alpha = 3\pi/2$.
6. $y = p \arcsin(x + q)$, jeśli : a) $p = 4$, $q = -1$; b) $p = -2/3$, $q = 1/2$.
6. $y = p \operatorname{arctg}(x + q)$, jeśli : a) $p = -3$, $q = 5/2$; b) $p = 2/5$, $q = -6$.
7. $y = a^{kx+b}$, jeśli : a) $a = 2$, $k = -1$, $b = 1$; b) $a = 1/2$, $k = 2$, $b = -2$.
8. $y = \log_a(kx + b)$, jeśli : a) $a = 10$, $k = 10$, $b = -1$; b) $1/10$, $k = 1/2$, $b = 2$.
9. $y = |2 - x| + |2 + x|$;
10. $y = x^2 - 6|x| + 9$;
11. $y = |6x^2 + x| - 1$;
12. $y = \left| \frac{2 - 3}{x + 2} \right|$;
13. $y = \sqrt{x + 3}$;
14. $y = 3 + \sqrt{x}$;
15. $y = 3 - \sqrt{x}$;
16. $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;
17. $y = \log_{1,5} x$;
18. $y = \log_{0,5} x$;
19. $y = x^{3/2}$;
20. $y = x^{2/3}$;
21. $y = \arccos 2x$;
22. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;
23. $y = 2 \operatorname{arctg} 3x$;
24. $y = \frac{1}{2} + \ln x$;
25. $y = \frac{1}{2} \ln x$;
26. $y = \ln \left(x + \frac{1}{2}\right)$;
27. $y = \ln \frac{x}{2}$.