
Lista Nr 3

Granica funkcji w punkcie

3.1 Podać definicję granicy w symbolach ε - δ :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

3.2 Obliczanie granic funkcji

3.2.1 Obliczyć podane granice funkcji:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$;
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$;
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9x + 20}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} - 1}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$;
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^x$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{2x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{3x + 7} \right)^{x + 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 7} \right)^{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{2x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2x^3)}{x^3}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \operatorname{Ctg} 5x$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{2x - \pi}}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \operatorname{th}(e^{-x}))$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\arcsin 2x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^x}{3^x - 2^x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot 3^x - 3 \cdot 5^x}{2 \cdot 7^x - 7 \cdot 2^x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{e^x - 1}$;

$$34. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}; \quad 35. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}; \quad 36. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos)}{\ln(1 + \cos 3x)};$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}; \quad 38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}; \quad 39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2};$$

3.2.2 Obliczyć granice jednostronne:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^4 - 1|}{x - 1}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3^+} [-x];$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \operatorname{sgn}(\sin x); \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x - 3}{|x - 3|}; \quad 8. \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{2 + x}{4 - x^2}; \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0^\pm} (2 + x)^{\frac{1}{x}};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2^\pm} 7^{\frac{1}{2-x}}; \quad 11. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x; \quad 12. \lim_{x \rightarrow 2\pi^\pm} \frac{x^2}{\cos x - 1}.$$

3.3 Zbadać, czy podane proste są asymptotami pionowymi wskazanych funkcji:

$$1. f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, \quad x = 0; \quad 2. f(x) = \ln(4 - x), \quad x = 4; \quad 3. f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^x - 1}, \quad x = 0;$$

$$4. f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad x = 0; \quad 5. f(x) = \frac{x^3}{x - 1}, \quad x = 1; \quad 6. f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad x = \pm 2.$$

3.4 Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

$$1. f(x) = \frac{x}{1 - x}; \quad 2. f(x) = x - 2\sqrt{x}; \quad 3. f(x) = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$4. f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}; \quad 5. f(x) = \frac{\sin x}{x^2}; \quad 6. f(x) = \cos \frac{1}{x};$$

$$7. f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad 8. f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}; \quad 9. f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}.$$