
Lista zadań Nr 7

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. Całka nieoznaczona

7.1 Całki podstawowe

1	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	2	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \left(\begin{array}{l} a > 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right)$	3'	$\int e^x dx = e^x + C$
4	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	5	$\int \cos x dx = \sin x + C$
6	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	7	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{Ctg} x + C$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	9	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcCtg} x + C \end{cases}$

7.2 Własności całki nieoznaczonej

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x) dx$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int (C \cdot f(x)) dx = C \cdot \int f(x) dx \quad (C = \text{const})$$

7.3 Metody całkowania

7.3.1 Bezpośrednie całkowanie

Z własności różniczki funkcji $\varphi(x) \in C^1(a, b)$ wynikają wzory:

$$\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$$

$$d\varphi(ax) = \frac{1}{a} d\varphi(x) \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

$$d\varphi(x+a) = d\varphi(x) \quad (a = \text{const})$$

Wzór na bezpośrednie całkowanie funkcji f która posiada pierwotną F na (a, b) przy założeniu że $\varphi(x) \in C^1(a, b)$:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

7.3.2 Całkowanie przez części

Twierdzenie (całkowanie iloczynu dwóch funkcji) Jeżeli $u, v \in C^1(a, b)$ $\imath \Rightarrow \imath$

$$\int u(x)v'(x) dx = uv - \int v(x)u'(x) dx$$

albo

$$\int u(x) dv(x) = uv - \int v(x) du(x)$$

7.3.3 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie $x = \varphi(t)$) Spełnione są warunki:

i) $\varphi: \Delta_t \rightarrow \Delta_x, \exists \varphi^{-1}: \Delta_x \rightarrow \Delta_t$;

ii) $\varphi(t) \in C^1(\Delta_t)$;

iii) $u = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ ma na Δ_t pierwotną U $\imath \Rightarrow \imath$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int u(t) dt =$$

$$U(t) + C = U(\varphi^{-1}(x)) + C$$

7.4 Stosując tablice całek podstawowych obliczyć całki

1. $\int (3 - x^2)^2 dx;$
2. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx;$
3. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$
4. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$
5. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^2} dx;$
6. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$
7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
8. $\int \frac{dx}{2 + 3x^2};$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}};$
10. $\int \frac{dx}{1 + \cos x};$
11. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx;$
12. $\int \frac{dx}{1 + \sin x};$
13. $\int \sin^3 x \cos x dx;$
14. $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx;$
15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}};$
16. $\int e^{\sin x} \cos x dx;$
17. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx;$
18. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}.$

7.5 Przekształcając wyrażenie podcałkowe, obliczyć całki

1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$
2. $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx;$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$
4. $\int x e^{x^2} dx;$
5. $\int \frac{e^x dx}{2 + e^x};$
6. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}};$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}};$
8. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$
9. $\int \operatorname{tg} x dx;$
10. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}};$
11. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx;$
12. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx;$
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{Ctg} x}};$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x};$
15. $\int \frac{dx}{\sin x};$
16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{th}^2 x}};$
17. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx;$
18. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$

7.6 Obliczyć całki metodą podstawienia

1. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx;$
2. $\int \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} dx;$
3. $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx;$
4. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx;$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx;$
6. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx;$
7. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x};$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$
9. $\int \cos^5 \cdot \sqrt{\sin x} dx;$
10. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$
11. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}};$
12. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx;$
13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx;$
14. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(1+x)};$
15. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

7.7 Całkując przez części, obliczyć całki

1. $\int \ln x dx;$
2. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx;$
3. $\int \operatorname{arctg} x dx;$
4. $\int x^4 \ln x dx;$
5. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$
6. $\int \arcsin x dx;$
7. $\int \sqrt{x} \ln x dx;$
8. $\int x \operatorname{arctg} x dx;$
9. $\int x e^{-x} dx;$
10. $\int x^2 \arccos x dx;$
11. $\int x^2 e^{-2x} dx;$
12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$
13. $\int x^3 e^{-x^2} dx;$
14. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$
15. $\int \sin(\ln x) dx;$
16. $\int e^x \cos x dx;$
17. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$
18. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$
19. $\int x \sin 2x dx$
20. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
21. $\int x^2 e^{-x} dx$
22. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$
23. $\int \ln(x+1) dx$
24. $\int x \cos x dx$

7.8 Obliczyć całki funkcji wymiernych

1. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx;$
2. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$
3. $\int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2};$
4. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+2x+2)};$
5. $\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x} dx;$
6. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)};$
7. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx;$
8. $\int \frac{dx}{x^4+1};$
9. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2};$
10. $\int \frac{xdx}{x^3-1};$
11. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$
12. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1};$
13. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1};$
14. $\int \frac{xdx}{x^6-1};$
15. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

$$\begin{array}{lll}
16. \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx & 17. \int \frac{2x-1}{(x-3)(3x+2)} dx & 18. \int \frac{2x}{(x+3)(5x-2)} dx \\
19. \int \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx & 20. \int \frac{dx}{x(x^2+1)} & 21. \int \frac{xdx}{x^2-3x+2}
\end{array}$$

7.9 Obliczyć całki funkcji niewymiernych

$$\begin{array}{lll}
1. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & 2. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx; & 3. \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}; \\
4. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}; & 5. \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx; & 6. \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx; \\
7. \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}; & 8. \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}; & 9. \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx; \\
10. \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+3x+1}}; & 11. \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}; & 12. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx; \\
13. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx; & 14. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}; & 15. \int \frac{xdx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}; \\
16. \int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}; & 17. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx; & 18. \int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}; \\
19. \int \sqrt{x^3+x^4} dx; & 20. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}; & 21. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx; \\
22. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}; & 23. \int \sqrt[3]{3x-x^3} dx; & 24. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.
\end{array}$$

7.10 Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{lll}
1. \int \cos^5 x dx; & 2. \int \sin^4 x dx; & 3. \int \sin^5 x \cos^3 x dx; \\
4. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx; & 5. \int \frac{dx}{\cos^2 x}; & 6. \int \sin^4 x \cos^5 x dx; \\
7. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}; & 8. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}; & 9. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}; \\
10. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}; & 11. \int \operatorname{Ctg}^6 x dx; & 12. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}; \\
13. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}; & 14. \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}; & 15. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx; \\
16. \int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}; & 17. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}; & 18. \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx
\end{array}$$

7.11 Obliczyć całki funkcji przestępnych

$$\begin{array}{lll}
1. \int x e^x \sin x dx; & 2. \int x^7 e^{-x^2} dx; & 3. \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx;
\end{array}$$

-
-
4. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx;$ 5. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx;$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}};$
7. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx;$ 8. $\int x \arcsin(1-x) dx;$ 9. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx;$
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x};$ 11. $\int \operatorname{sh}^3 x dx;$ 12. $\int \operatorname{ch}^4 x dx;$
13. $\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x};$ 14. $\int \operatorname{th} x dx;$ 15. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$
16. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx;$ 17. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$ 18. $\int \arcsin \sqrt{x} dx;$
19. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx;$ 20. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$ 21. $\int \operatorname{Cth}^2 x dx.$